**线性代数终极笔记**

注：概念、性质、定理、公式必须清楚，解法必须熟练，**计算必须细心准确**



：全体维实向量构成的集合叫做维向量空间.







√ 关于：

①称为的标准基，中的自然基，单位坐标向量；

②线性无关；

③；

④；

⑤任意一个维向量都可以用线性表示.

行列式的定义 

√ 行列式的计算：

①行列式按行（列）展开定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

②若都是方阵（不必同阶）,则（拉普拉斯展开式）

③上三角、下三角、主对角行列式等于主对角线上元素的乘积.

④关于副对角线： （即：所有取自不同行不同列的个元素的乘积的代数和）

⑤范德蒙德行列式：

矩阵的定义 由个数排成的行列的表称为矩阵.记作：或

伴随矩阵 ，为中各个元素的代数余子式.

√ 逆矩阵的求法:

①  ：  

②

③ 

√ 方阵的幂的性质： 

√ 设的列向量为,的列向量为，

则 ，为的解可由线性表示.即：的列向量能由的列向量线性表示，为系数矩阵.

同理：的行向量能由的行向量线性表示，为系数矩阵.

即： 

√ 用对角矩阵乘一个矩阵,相当于用的对角线上的各元素依次乘此矩阵的向量；

用对角矩阵乘一个矩阵,相当于用的对角线上的各元素依次乘此矩阵的向量.

√ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘.

√ 分块矩阵的转置矩阵：

分块矩阵的逆矩阵： 

 

分块对角阵相乘：,

分块对角阵的伴随矩阵： 

√ 矩阵方程的解法()：设法化成





1. 零向量是任何向量的线性组合,零向量与任何同维实向量正交.
2. 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.
3. 部分相关,整体必相关；整体无关,部分必无关. （向量个数变动）
4. 原向量组无关,接长向量组无关；接长向量组相关,原向量组相关. （向量维数变动）
5. 两个向量线性相关对应元素成比例；两两正交的非零向量组线性无关.
6. 向量组中任一向量≤≤都是此向量组的线性组合.
7. 向量组线性相关向量组中至少有一个向量可由其余个向量线性表示.

向量组线性无关向量组中每一个向量都不能由其余个向量线性表示.

1. 维列向量组线性相关；

维列向量组线性无关.

1. 若线性无关，而线性相关,则可由线性表示,且表示法唯一.
2. 矩阵的行向量组的秩列向量组的秩矩阵的秩. 行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

行阶梯形矩阵 可画出一条阶梯线，线的下方全为；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素非零.当非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在列的其他元素都是时，称为行最简形矩阵

1. 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩,且不改变列向量间的线性关系；

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩,且不改变行向量间的线性关系.

即：矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

√ 矩阵的初等变换和初等矩阵的关系：

对施行一次初等变换得到的矩阵,等于用相应的初等矩阵乘；

对施行一次初等变换得到的矩阵,等于用相应的初等矩阵乘.

矩阵的秩 如果矩阵存在不为零的阶子式，且任意阶子式均为零，则称矩阵的秩为.记作

向量组的秩 向量组的极大无关组所含向量的个数，称为这个向量组的秩.记作

矩阵等价 经过有限次初等变换化为. 记作：

向量组等价 和可以相互线性表示. 记作：

1. 矩阵与等价，可逆作为向量组等价,即：秩相等的向量组不一定等价.

矩阵与作为向量组等价

矩阵与等价.

1. 向量组可由向量组线性表示有解≤.
2. 向量组可由向量组线性表示,且，则线性相关.

向量组线性无关,且可由线性表示,则≤.

1. 向量组可由向量组线性表示,且,则两向量组等价；
2. 任一向量组和它的极大无关组等价.向量组的任意两个极大无关组等价.
3. 向量组的极大无关组不唯一，但极大无关组所含向量个数唯一确定.
4. 若两个线性无关的向量组等价,则它们包含的向量个数相等.
5. 设是矩阵,若，的行向量线性无关；

若，的列向量线性无关,即：线性无关.

√ 矩阵的秩的性质：

①≥  ≤≤

② 

③

④

⑤≤

⑥ 即：可逆矩阵不影响矩阵的秩.

⑦若；

若

⑧等价标准型.

⑨≤ ≤≤ 

⑩ 

：

线性方程组的矩阵式  向量式 

 



线性方程组解的性质：

√ 设为矩阵,若一定有解，

当时,一定不是唯一解,则该向量组线性相关.

是的上限.

√ 判断是的基础解系的条件：

① 线性无关；

② 都是的解；

③ .

√ 一个齐次线性方程组的基础解系不唯一.

√ 若是的一个解，是的一个解线性无关

√ 与同解（列向量个数相同）,则：

① 它们的极大无关组相对应,从而秩相等；

② 它们对应的部分组有一样的线性相关性；

③ 它们有相同的内在线性关系.

√ 两个齐次线性线性方程组与同解.

√ 两个非齐次线性方程组与都有解，并且同解.

√ 矩阵与的行向量组等价齐次方程组与同解（左乘可逆矩阵）；

矩阵与的列向量组等价（右乘可逆矩阵）.

√ 关于公共解的三中处理办法：

1. 把(I)与(II)联立起来求解；
2. 通过(I)与(II)各自的通解，找出公共解；

当(I)与(II)都是齐次线性方程组时，设是(I)的基础解系, 是(II)的基础解系，则 (I)与(II)有公共解基础解系个数少的通解可由另一个方程组的基础解系线性表示.

即：

当(I)与(II)都是非齐次线性方程组时，设是(I)的通解，是(II)的通解，两方程组有公共解可由线性表示. 即：

1. 设(I)的通解已知，把该通解代入(II)中，找出(I)的通解中的任意常数所应满足(II)的关系式而求出公共解。

标准正交基 个维线性无关的向量,两两正交,每个向量长度为1.

向量与的内积 

 . 记为：

向量的长度 

是单位向量 . 即长度为的向量.

√ 内积的性质： ① 正定性：

② 对称性：

③ 双线性：





的特征矩阵 .

的特征多项式 .

√ 是矩阵的特征多项式

的特征方程 . 

√  ，称为矩阵的迹.

√ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的各元素.

√ 若,则为的特征值,且的基础解系即为属于的线性无关的特征向量.

√ 一定可分解为=、,从而的特征值为：,  .

为各行的公比，为各列的公比.

√ 若的全部特征值，是多项式,则:

① 若满足的任何一个特征值必满足

②的全部特征值为；.

√ 初等矩阵的性质：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

√ 设，对阶矩阵规定：为的一个多项式.

√ 

√ 

√ 的特征向量不一定是的特征向量.

√ 与有相同的特征值，但特征向量不一定相同.

与相似  （为可逆矩阵） 记为：

与正交相似  （为正交矩阵）

可以相似对角化 与对角阵相似. 记为： （称是的相似标准形）

√ 可相似对角化 为的重数恰有个线性无关的特征向量. 这时,为的特征向量拼成的矩阵，为对角阵,主对角线上的元素为的特征值.设为对应于的线性无关的特征向量,则有：

.

：当为的重的特征值时，可相似对角化的重数 基础解系的个数.

√ 若阶矩阵有个互异的特征值可相似对角化.

√ 若可相似对角化,则其非零特征值的个数（重根重复计算）.

√ 若=，

√ 相似矩阵的性质：

①,从而有相同的特征值,但特征向量不一定相同.

是关于的特征向量,是关于的特征向量.

②

③ 从而同时可逆或不可逆

④

⑤； （若均可逆）；

⑥ （为整数）；，

⑦

：前四个都是必要条件.

√ 数量矩阵只与自己相似.

√ 实对称矩阵的性质：

① 特征值全是实数,特征向量是实向量；

② 不同特征值对应的特征向量必定正交；

：对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

③一定有个线性无关的特征向量.

若有重的特征值,该特征值的重数=；

④必可用正交矩阵相似对角化，即：任一实二次型可经正交变换化为标准形；

⑤与对角矩阵合同，即：任一实二次型可经可逆线性变换化为标准形；

⑥两个实对称矩阵相似有相同的特征值.

正交矩阵 

√ 为正交矩阵的个行（列）向量构成的一组标准正交基.

√ 正交矩阵的性质：① ；

② ；

③ 正交阵的行列式等于1或-1；

④ 是正交阵,则，也是正交阵；

⑤ 两个正交阵之积仍是正交阵；

⑥ 的行（列）向量都是单位正交向量组.

二次型  ，即为对称矩阵，

与合同 . 记作： （）

正惯性指数 二次型的规范形中正项项数 负惯性指数二次型的规范形中负项项数

符号差  (为二次型的秩)

√ 两个矩阵合同它们有相同的正负惯性指数他们的秩与正惯性指数分别相等.

√ 两个矩阵合同的充分条件是：

√ 两个矩阵合同的必要条件是：

√ 经过化为标准形.

√ 二次型的标准形不是唯一的,与所作的正交变换有关,但非零系数的个数是由 唯一确定的.

√ 当标准形中的系数为-1或0或1时,称为二次型的规范形 .

√ 实对称矩阵的正（负）惯性指数等于它的正（负）特征值的个数.

√ 惯性定理：任一实对称矩阵与唯一对角阵合同.

√ 用正交变换化二次型为标准形:

1. 求出的特征值、特征向量；
2. 对个特征向量正交规范化；
3. 构造（正交矩阵）,作变换,则新的二次型为,的主对角上的元素即为的特征值.

施密特正交规范化 线性无关,



单位化：  

技巧：取正交的基础解系，跳过施密特正交化。让第二个解向量先与第一个解向量正交，再把第二个解向量代入方程，确定其自由变量. 例如：取，.

正定二次型 不全为零，.

正定矩阵 正定二次型对应的矩阵.

√ 为正定二次型（之一成立）：

1.  ，；
2. 的特征值全大于；
3. 的正惯性指数为；
4. 的所有顺序主子式全大于；
5. 与合同，即存在可逆矩阵使得；
6. 存在可逆矩阵，使得；
7. 存在正交矩阵，使得 （大于）.

√ 合同变换不改变二次型的正定性.

√ 为正定矩阵 ； .

√ 为正定矩阵也是正定矩阵.

√ 与合同，若为正定矩阵为正定矩阵

√ 为正定矩阵为正定矩阵，但不一定为正定矩阵.